Для $n \in \mathbb{N}$ положим $a_n := \inf\limits_{k \geq n} x_k$, $b_n := \sup\limits_{k \geq n} x_k$

Из определений видно что $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. По лемме о вложенных отрезков $[a_n\ b_n]$ имеет общую точку A. Т.к при любом $n \in \mathbb{N}$

* Вопрос 12.

$$a_n \leq A \leq b_n$$

а при $k \geq n$

$$a_n = \inf_{k \geq n} x_k \leq x_k \leq \sup_{k \geq N} x_k = b_n$$

то при $k \geq n$: $|A - x_k| \leq b_n - a_n$.

Но из $x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3}$ => что при $n > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_{k \geq n} x_k = a_n \leq b_n = \sup_{k \geq n} x_k \leq x_N + \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Downarrow$

при $n > m$

$$b_n - a_n \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A - x_k| \leq b_n - a_n \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A - x_k| < \varepsilon$. и мы показали что

$$\lim_{k \to \infty} x_k = A \ \blacktriangleright$$