Задание 51.

Теорема Коши о конечном покрытии.

1≤ Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ - функции непрерывные на $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемые $]\alpha, \beta[$. Тогда найдется точка $\tau \in$ $\in]\alpha, \beta[$ такая что

$$x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

Если к тому же $x'(t) \neq 0$ при любом $t \in]\alpha, \beta[$ то $x(\alpha) \neq x(\beta)$

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$$

◀ $F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha))$ удовлетворяет условиям Ролля на отрезке $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists\, \tau \in]\alpha, \beta[$ в которой $F'(\tau) = 0$ что равносильно доказываемому равенству. Чтобы получить из него $\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$, заметим что $x'(t) \neq 0$ на $]\alpha, \beta[$, то по Ⓣ Ролля $x(\alpha) \neq x(\beta)$ ▶

Замечания к теореме Коши.

1°. Если пару функций $x(t)$, $y(t)$ △ как закон движения частицы, то $(x'(t), y'(t))$ - скорость частицы в момент времени t, а $(x(\beta) - x(\alpha), y(\beta) - y(\alpha))$ - вектор перемещения ~~к по~~ за промежуток времени $[\alpha, \beta]$.

2°. Формулу Лагранжа можно вывести из Коши, если предположить $x = x(t) = t$, $y(t) = y(x) = f(x)$, а $\alpha = a$, $\beta = b$.